MAI SUCESIONES Y SERIES EN EXÁMENES

MAYO 21. P1 NM

8. [Maximum mark: 8]

Charlie and Daniella each began a fitness programme. On day one, they both ran $500\,\text{m}$. On each subsequent day, Charlie ran $100\,\text{m}$ more than the previous day whereas Daniella increased her distance by 2% of the distance ran on the previous day.

(a) Calculate how far

(i) Charlie ran on day 20 of his fitness programme.

(ii) Daniella ran on day 20 of her fitness programme. [5]

On day n of the fitness programmes Daniella runs more than Charlie for the first time.

(b) Find the value of n. [3]

8. (a) (i) attempt to find u_{20} using an arithmetic sequence ***(M1)***

e.g. $u_1 = 500$ and $d = 100$ **OR** $u_{20} = 500 + 1900$ **OR** $500, 600, 700, \ldots$

(Charlie ran) $2400\,\text{m}$ ***A1***

(ii) $(r =)\ 1.02$ ***(A1)***

attempt to find u_{20} using a geometric sequence ***(M1)***

e.g. identifying $u_1 = 500$ and a value for r **OR** $500 \times r^{19}$ **OR** $500,\ 510,\ 520.2, \ldots$

(Daniella ran) $728\,\text{m}$ $(728.405\ldots)$ ***A1***

[5 marks]

(b) $500 \times 1.02^{n-1} > 500 + (n-1) \times 100$ ***(M1)***

attempt to solve inequality ***(M1)***

$n > 184.215\ldots$

$n = 185$ ***A1***

[3 marks]

Total [8 marks]

NOV 21. P2 NM

2. [Puntuación máxima: 16]

En el equipo de admisiones de una nueva universidad están tratando de predecir el número de solicitudes de alumnos que recibirán cada año.

Sea n el número de años que lleva funcionando la universidad. El equipo de admisiones obtiene los siguientes datos correspondientes a los dos primeros años.

Año (n)	Número de solicitudes recibidas el año n
1	12 300
2	12 669

(a) Calcule el aumento porcentual de las solicitudes entre el primer año y el segundo. [2]

Se supone que el número de alumnos que solicitan plaza en esta universidad cada año sigue una progresión geométrica u_n.

(b) (i) Escriba la razón común de la progresión.

(ii) Halle una expresión para u_n.

(iii) Halle el número de solicitudes de alumnos que la universidad espera recibir cuando $n = 11$. Exprese la respuesta redondeando al número entero más próximo. [4]

El primer año, esta universidad tenía 10 380 plazas disponibles para solicitantes. El equipo de admisiones anunció que, cada año, aumentaría en 600 el número de plazas disponibles.

Sea v_n el número de plazas que hay disponibles en esta universidad el año n.

(c) Escriba una expresión para v_n. [2]

Durante los 10 primeros años de funcionamiento de la universidad, se han cubierto todas las plazas. Los alumnos que consiguen plaza pagan USD 80 cada uno en concepto de cuota de admisión.

(d) Calcule la cantidad total que se ha pagado a la universidad en concepto de cuotas de admisión durante los 10 primeros años. [3]

Cuando $n = k$, el número de plazas disponibles superará, por vez primera, el número de alumnos que solicitan plaza.

(e) Halle k. [3]

(f) Indique si, para todo $n > k$, la universidad tendrá plazas disponibles para todos los solicitantes. Justifique su respuesta. [2]

2. (a) $\dfrac{12\,669-12\,300}{12\,300}\times 100$ ***(M1)***

3% ***A1***

[2 puntos]

(b) (i) $1,03$ ***A1***

Nota: Arrastre de error a partir del apartado (a).

(ii) $(u_n =)\ 12\,300\times 1,03^{n-1}$ ***A1***

(iii) $(u_{11} =)\ 12\,300\times 1,03^{10}$ ***(M1)***

$16\,530$ ***A1***

Nota: La respuesta debe estar redondeada al entero más próximo. No acepte 16 500.

[4 puntos]

(c) $(v_n =)\ 10\,380+600(n-1)$ **O BIEN** $600n+9780$ ***M1A1***

Nota: Conceda ***M1*** por haber sustituido valores en la fórmula de la progresión aritmética y ***A1*** por haberlos sustituido correctamente.

[2 puntos]

(d) $80\times\dfrac{10}{2}\left(2(10\,380)+9(600)\right)$ ***(M1)(M1)***

Nota: Conceda ***(M1)*** por haber multiplicado por 80 y ***(M1)*** por haber sustituido correctamente valores en la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

USD 10 500 000 (USD 10 464 000) ***A1***

[3 puntos]

(e) $12\,300 \times 1,03^{n-1} < 10\,380 + 600(n-1)$ o equivalente **(M1)**

Nota: Conceda ***M1*** por una igualdad o desigualdad de <u>sus</u> expresiones procedentes de los apartados (b) y (c).

O BIEN

Por un gráfico donde se muestre $y = 12\,300 \times 1,03^{n-1}$ y $y = 10\,380 + 600(n-1)$ ***(M1)***

O BIEN

Por un gráfico donde se muestre $y = 12\,300 \times 1,03^{n-1} - (10\,380 + 600(n-1))$ ***(M1)***

O BIEN

Por una lista de valores que incluya $(u_n =)$ 17537 y $(v_n =)$ 17580 ***(M1)***

O BIEN

$12,4953\ldots$ hallado mediante un método gráfico o resolviendo la igualdad numérica

Nota: Conceda ***(M1)*** por un intento válido de resolución.

POR LO TANTO

$(k =)$ 13 ***A1***

[3 puntos]

(f) Eso no garantizará que haya suficientes plazas. ***A1***

O BIEN

Una enunciado escrito acerca de $u_n > v_n$ con un rango de valores para n.

Ejemplo "Cuando $n = 24$ (o mayor), el número de solicitudes volverá a superar el número de plazas" ("$u_n > v_n$, $n \geq 24$"). ***R1***

O BIEN

El crecimiento exponencial siempre superará el crecimiento lineal ***R1***

Nota: Acepte un dibujo aproximado equivalente. No conceda ***A1R0***.

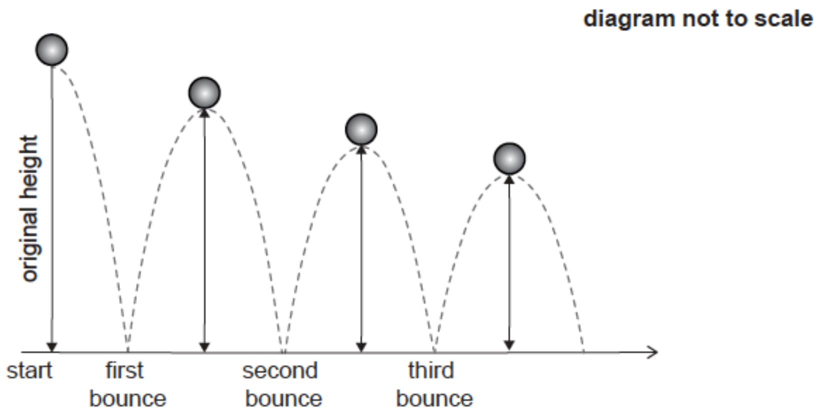
[2 puntos]

Total: [16 puntos]

MAYO 22. P1 NM

13. [Maximum mark: 7]

A ball is dropped from a height of 1.8 metres and bounces on the ground. The maximum height reached by the ball, after each bounce, is 85% of the previous maximum height.



(a) Show that the maximum height reached by the ball after it has bounced for the sixth time is $68\,\text{cm}$, to the nearest cm. [2]

(b) Find the number of times, after the first bounce, that the maximum height reached is greater than $10\,\text{cm}$. [2]

(c) Find the total **vertical** distance travelled by the ball from the point at which it is dropped until the fourth bounce. [3]

13. (a) use of geometric sequence with $r = 0.85$ ***M1***

EITHER

$(0.85)^6(1.8)$ **OR** $0.678869\ldots$ **OR** $(0.85)^5(1.53)$ ***A1***

$= 0.68\text{ m}$

$= 68\text{ cm}$ ***AG***

OR

$(0.85)^6(180)$ **OR** $(0.85)^5(153)$ ***A1***

$= 68\text{ cm}$ ***AG***

[2 marks]

continued…

(b) **EITHER**
$(0.85)^n(1.8) > 0.1$ **OR** $(0.85)^{n-1}(1.53) > 0.1$ ***(M1)***

Note: If 1.8 m (or 180 cm) is used then ***(M1)*** only awarded for use of n in $(0.85)^n(1.8) > 0.1$.
If 1.53 m (or 153 cm) is used then ***(M1)*** only awarded for use of $n-1$ in $(0.85)^{n-1}(1.53) > 0.1$.

17 ***A1***

OR
$(0.85)^{17}(1.8) = 0.114\text{ m}$ and $(0.85)^{18}(1.8) = 0.0966\text{ m}$ ***(M1)***
17 ***A1***

OR
solving $(0.85)^n(1.8) = 0.1$ to find $n = 17.8$ ***(M1)***
17 ***A1***

Note: Evidence of solving may be a graph **OR** the "solver" function **OR** use of logs to solve the equation. Working may use cm.

[2 marks]

(c) **EITHER**
distance (in one direction) travelled between first and fourth bounce
$= \dfrac{(1.8 \times 0.85)(1-0.85^3)}{1-0.85}$ $(= 3.935925)$ ***(A1)***
recognizing distances are travelled twice except first distance ***(M1)***
$1.8 + 2(3.935925)$
$= 9.67\text{ m}$ $(9.67185\ldots\text{ m})$ ***A1***

OR
distance (in one direction) travelled between drop and fourth bounce
$= \dfrac{(1.8)(1-0.85^4)}{1-0.85}$ $(= 5.735925)$ ***(A1)***
recognizing distances are travelled twice except first distance ***(M1)***
$2(5.735925) - 1.8$
$= 9.67\text{ m}$ $(9.67185\ldots\text{ m})$ ***A1***

OR
distance (in one direction) travelled between first and fourth bounce
$(0.85)(1.8) + (0.85)^2(1.8) + (0.85)^3(1.8)$ $(= 3.935925\ldots)$ ***(A1)***
recognizing distances are travelled twice except first distance ***(M1)***
$1.8 + 2(0.85)(1.8) + 2(0.85)^2(1.8) + 2(0.85)^3(1.8)$
$= 9.67\text{ m}$ $(9.67185\ldots\text{ m})$ ***A1***

Note: Answers may be given in cm.

[3 marks]
[Total 7 marks]

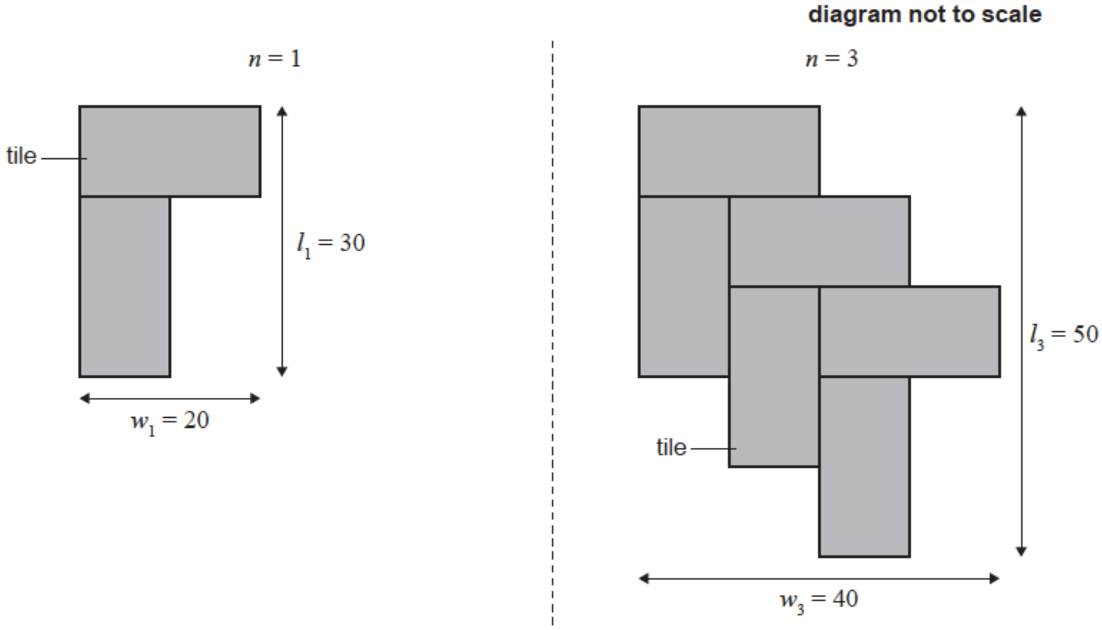
MAYO 22. P2 NM

2. [Maximum mark: 19]

Eddie decides to construct a path across his rectangular grass lawn using pairs of tiles.

Each tile is $10\,\text{cm}$ wide and $20\,\text{cm}$ long. The following diagrams show the path after Eddie has laid one pair and three pairs of tiles. This pattern continues until Eddie reaches the other side of his lawn. When n pairs of tiles are laid, the path has a width of w_n centimetres and a length l_n centimetres.

The following diagrams show this pattern for one pair of tiles and for three pairs of tiles, where the white space around each diagram represents Eddie's lawn.



The following table shows the values of w_n and l_n for the first three values of n.

Number of pairs of tiles, n	Width of lawn crossed by path, w_n (cm)	Length of lawn crossed by path, l_n (cm)
1	20	30
2	a	b
3	40	50

(a) Find the value of

(i) a.

(ii) b. [2]

(b) Write down an expression in terms of n for

(i) w_n.

(ii) l_n. [3]

Eddie's lawn has a length $740\,\text{cm}$.

(c) (i) Show that Eddie needs 144 tiles.

(ii) Find the value of w_n for this path. [3]

(d) Find the total area of the tiles in Eddie's path. Give your answer in the form $a \times 10^k$ where $1 \leq a < 10$ and k is an integer. [3]

The tiles cost $\$24.50$ per square metre and are sold in packs of five tiles.

(e) Find the cost of a single pack of five tiles. [3]

To allow for breakages Eddie wants to have at least $8\,\%$ more tiles than he needs.

(f) Find the minimum number of packs of tiles Eddie will need to order. [3]

There is a fixed delivery cost of $\$35$.

(g) Find the total cost for Eddie's order. [2]

2. (a) (i) 30 — ***A1***

(ii) 40 — ***A1***

[2 marks]

(b) arithmetic formula chosen — ***(M1)***

(i) $w_n = 20 + (n-1)10 \quad (= 10 + 10n)$ — ***A1***

(ii) $l_n = 30 + (n-1)10 \quad (= 20 + 10n)$ — ***A1***

[3 marks]

(c) (i) $740 = 30 + (n-1)10$ **OR** $740 = 20 + 10n$ — ***M1***

$n = 72$ — ***A1***

144 tiles — ***AG***

Note: The ***AG*** line must be stated for the final ***A1*** to be awarded.

(ii) $w_{72} = 730$ — ***A1***

[3 marks]

(d) $(10 \times 20) \times 144$ — ***(M1)***

$= 28800$ — ***(A1)***

$2.88 \times 10^4 \quad \text{cm}^2$ — ***A1***

Note: Follow through within the question for correctly converting *their* intermediate value into standard form (but only if the pre-conversion value is seen).

[3 marks]

continued…

(e) **EITHER**

1 square metre $= 100\,\text{cm} \times 100\,\text{cm}$ — ***(M1)***

(so, 50 tiles) and hence 10 packs of tiles in a square metre — ***(A1)***

(so each pack is $\dfrac{\$24.50}{10 \text{ packs}}$)

OR

area covered by one pack of tiles is $(0.2\,\text{m} \times 0.1\,\text{m} \times 5 =)\ 0.1\ \text{m}^2$ — ***(A1)***

24.5×0.1 — ***(M1)***

THEN

\$2.45 per pack (of 5 tiles) — ***A1***

[3 marks]

(f) $\dfrac{1.08 \times 144}{5} \quad (= 31.104)$ — ***(M1)(M1)***

Note: Award ***M1*** for correct numerator, ***M1*** for correct denominator.

32 (packs of tiles) — ***A1***

[3 marks]

(g) $35 + (32 \times 2.45)$ — ***(M1)***

\$113 (113.4) — ***A1***

[2 marks]

[Total 19 marks]

NOV 22. P1 NM

2. [Puntuación máxima: 7]

Durante el primer mes de un programa de reforestación, la ciudad de Neerim planta 85 árboles. A partir de ahí, cada mes se plantarán 30 árboles más que el mes anterior.

En la siguiente tabla se muestra el número de árboles que se plantarán en cada uno de los tres primeros meses.

Mes	Árboles plantados
1	85
2	115
3	145

(a) Halle el número de árboles que se plantarán el 15.º mes. [3]

(b) Halle el número total de árboles que se plantarán durante los 15 primeros meses. [2]

(c) Halle el número medio de árboles que se plantarán al mes durante los 15 primeros meses. [2]

2. (a) Por utilizar el n-ésimo término de una progresión aritmética ***(M1)***

$u_{15} = 85 + (15-1)\times 30$ ***(A1)***

505 ***A1***

[3 puntos]

(b) Por utilizar la fórmula de n términos de una serie aritmética ***(M1)***

$S_{15} = \frac{15}{2}(85+505)$ **O BIEN** $\frac{15}{2}(2\times 85 + (15-1)\times 30)$

$4430\ \ (4425)$ ***A1***

[2 puntos]

(c) $\frac{4425}{15}$ **O BIEN** $85 + (8-1)\times 30$ ***(M1)***

295 ***A1***

Nota:	Acepte $295{,}333\ldots$ como resultado de utilizar el valor con 3 cifras significativas del apartado (b).

[2 puntos]

Total [7 puntos]

MAYO 24 P1

3. [Maximum mark: 7]

On 1 January 2025, the Faber Car Company will release a new car to global markets. The company expects to sell 40 cars in January 2025. The number of cars sold each month can be modelled by a geometric sequence where $r = 1.1$.

(a) Use this model to find the number of cars that will be sold in December 2025. [2]

(b) Use this model to find the total number of cars that will be sold in the year

(i) 2025.

(ii) 2026. [5]

9. [Puntuación máxima: 6]

Una maratón es una carrera sobre una distancia de $42{,}195\,\text{km}$. Eefje y Shumay son dos corredoras que están entrenando para correr una maratón.

Estas dos corredoras entrenan de diferente manera:
- Eefje corre $5\,\text{km}$ el primer día de entrenamiento y luego, cada día posterior, va aumentando en $2\,\text{km}$ la distancia que corre.
- Shumay corre $5\,\text{km}$ el primer día de entrenamiento y luego, cada día posterior, va aumentando un $13\,\%$ la distancia que corre.

Determine cuál de las dos corredoras será la primera en correr la distancia de una maratón en un día de entrenamiento dado; indique en qué día de su entrenamiento sucederá esto.

NOV 24 P1

8. [Maximum mark: 5]

On 1 January in a particular year, Anton invests $\$18\,000$ in a new bank account. The account earns 4% simple interest, on the original $\$18\,000$, at the start of each subsequent year.

The amounts in the account at the start of each year form an arithmetic sequence.

(a) Find the common difference of this sequence. [2]

After k complete years, the amount in Anton's account will be greater than $\$32\,000$ for the first time.

(b) Find the value of k. [3]

MAYO 25 P1

3. [Maximum mark: 6]

As part of an experiment, a colony of ants was created and observed. At the start of week one, 200 ants were observed in the colony. The number of ants in the colony increased by 15% each week.

(a) Calculate the number of ants in the colony at the start of week 11. [3]

The number of ants in the colony was first observed to exceed 3000 in week k.

(b) Find the value of k. [3]